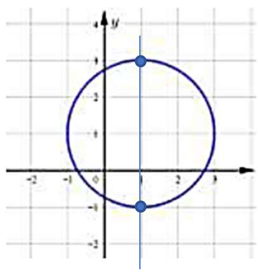
Priprema za ispit – Funkcije

(rješenja)

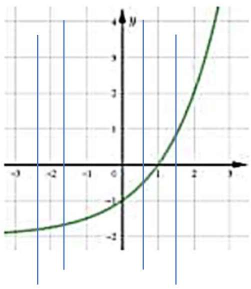
1. Dijagrami c i d prikazuju funkcije jer je svakom elementu domene pridružen točno jedan element kodomene. Na dijagramu a za jedan element domene (c) ne postoji pridruženi element kodomene, a na dijagramu b jednom elementu domene (broj 2) pridružena su dva elementa kodomene.

2.

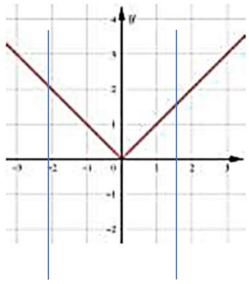
a)



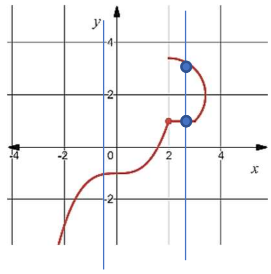
b)



c)

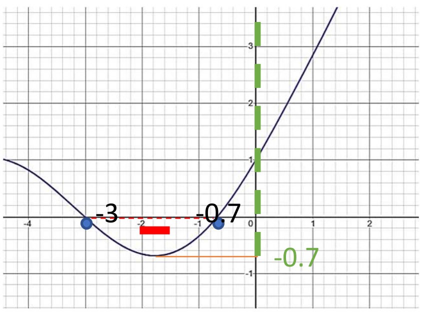


d)



Kada napravimo vertikalni test, vidimo da su funkcije prikazane pod b i c jer svaka vertikala graf siječe samo u jednoj točki. Pod a i d postoje vertikale koje graf sijeku u više od jedne točke što znači da je jednom elementu domene pridruženo više elemenata kodomene.

3.



a) nul-točke funkcije: -3, -0.7

b) funkcija je negativna za $x \epsilon \langle -3, -0.7 \rangle$

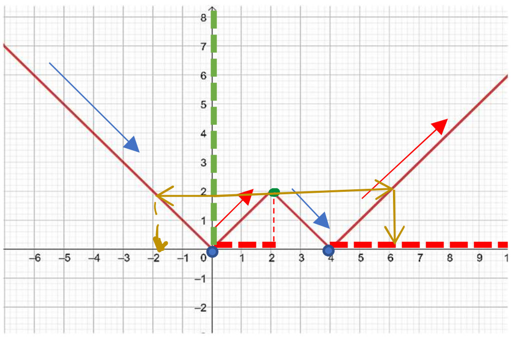
c) slika funkcije [-0.7,∞⟩

d) Funkcija je omeđena s donje strane.

Donja međa: m= -0.7

e) f(0)=1

4.



a) nul-točke funkcije : 0, 4

b) na kojem dijelu domene je funkcija rastuća $\langle \mathbf{0}, \mathbf{2} \rangle \cup \langle \mathbf{4}, \infty \rangle$

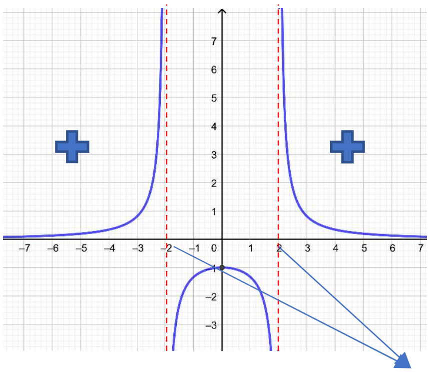
c) slika funkcije $[\mathbf{0}, \infty\rangle$

d) Funkcija je omeđena s donje strane. Donja međa: m= 0

e) x ako je f(x)=2

x_1= -2, x_2 = 2, x_3 = 6

5



a) domena funkcije $R \setminus \{-2,2\}$

b) na kojem dijelu domene je funkcija pozitivna $\langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 2, \infty \rangle$

c) slika funkcije: $\langle -\infty, -1] \cup \langle 0, \infty \rangle$

d) je li funkcija omeđena? Ako da, s koje strane?

Funkcija nije omeđena

Mjesta prekida grafa. Tu funkcija nije definirana.

M.Mlikotić,prof.

6. a) $2x-1=0 \Rightarrow N.T.\ x=\frac{1}{2}$

b) $3x^2-27=0 \Rightarrow 3x^2=27 \Rightarrow x^2=9\ /\sqrt{\ } \Rightarrow N.T. \quad x_1=-3, x_2=3$

c) $\log_2(x-2)=0 \Rightarrow x-2=2^0 \Rightarrow x=1+2 \Rightarrow N.T. x=3$

d) $2^{x-1}-4=0 \Rightarrow 2^{x-1}=4 \Rightarrow 2^{x-1}=2^2 \Rightarrow x-1=2 \Rightarrow N.T. \quad x=3$

7.

a) $f(x)=\sqrt{2x-5}$ Domenu određujemo iz uvjeta: $2x-5 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 5 \Rightarrow x \geq \frac{5}{2}$ => D(f)=$[\frac{5}{2}, \infty\rangle$

b) $f(x)=log_2(x^2+3x+2)$

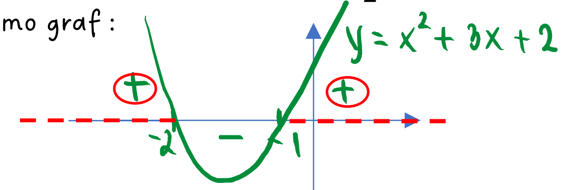
Domenu određujemo iz uvjeta: $x^2+3x+2>0$

Trebamo riješiti kvadratnu nejednadžbu:

1. Izračunamo nul-točke: $x^2+3x+2=0$

$$\Rightarrow x=\frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \Rightarrow N.T. x_1=-2, x_2=-1$$

2. Skiciramo graf :



Označimo predznak izraza i označimo koji dijelovi domene odgovaraju pozitivnom dijelu grafa.

3. Rješenje: $x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle -1, \infty\rangle$

D(f) = $\langle -\infty, -2\rangle \cup \langle -1, \infty\rangle$

c) $f(x)=\sqrt{\frac{x+3}{x-4}}$

$\frac{x+3}{x-4} \geq 0\ /\ (x-4)^2$ -množimo s kvadratom nazivnika jer je kvadrat uvijek pozitivan i znak nejednakosti ostaje nepromijenjen

Ne smijemo zaboraviti uvjet da nazivnik ne smije biti 0:

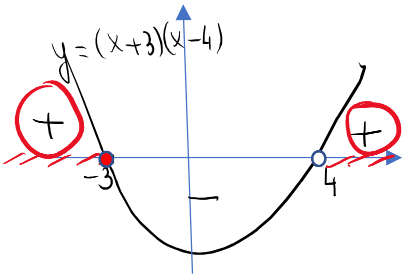
$x-4 \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{x \neq 4}$

$(x+3)(x-4) \geq 0$ - ovo je kvadratna nejednadžba

-Nul-točke: $(x+3)(x-4)=0$ => $x+3=0, \quad x-4=0$

$x_1=-3 \qquad x_2=4$

- Grafički prikaz :



Rješenje:

$x \in \langle -\infty, -3] \cup \langle 4, \infty\rangle$

D(f) =$\langle -\infty, -3] \cup \langle 4, \infty\rangle$

d) $f(x)=\frac{x+2}{3x^2-5x-2}$

Domenu ćemo odrediti iz uvjeta da nazivnik mora biti različit od 0.

Odredimo nul- točke nazivnika: $3x^2-5x-2=0 \Rightarrow x=\frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} \Rightarrow x_1=-\frac{1}{3}, x_2=2$

D(f) = R\ $\{-\frac{1}{3}, 2\}$

M.Mlikotić,prof.

e) $f(x) = tg\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$

Tangens nije definiran za argumente koji su jednaki $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Postavljamo uvjet $3x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$3x \neq \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + k\pi \;/ \cdot 6 \Rightarrow 18x \neq 2\pi + 3\pi + 6k\pi /: 18$$

$$\boldsymbol{x \neq \frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}}$$

D(f) = R \ { $\frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$}

f) $f(x) = ctg\,2x$

Cotangens nije definiran za argumente koji su jednaki $k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Postavljamo uvjet $2x \neq k\pi \;/: 2 \Rightarrow x \neq +\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

D(f) = R \ { $\frac{k\pi}{2}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$}

g) $f(x) = \frac{x}{1 - log\,2x}$

Da bismo odredili domenu, moramo postaviti dva uvjeta:

$1 - log\,2x \neq 0$ i $2x > 0$

Rješavanjem prvog uvjeta slijedi : $log\,2x \neq 1 \Rightarrow 2x \neq 10^1 \Rightarrow x \neq 5$ (mogli smo riješiti kao jednadžbu vodeći računa da dobiveno rješenje ne smije biti u domeni)

Rješavanjem drugog uvjeta => x>0

Kad uzmemo u obzir oba uvjeta: D(f)=⟨0,∞ ⟩ \ {5}

8. $f(x) = x^2 + 5x$.

a) f(-2) = $(-2)^2 + 5 \cdot (-2) = 4 - 10 = -6$

b) f(x-1) = $(x-1)^2 + 5 \cdot (x-1) = x^2 - 2x + 1 + 5x - 5 = x^2 + 3x - 4$

c) x ako je f(x)=-6

$$-6 = x^2 + 5x \Rightarrow x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \qquad x_1 = -3, x_2 = -2$$

9. $f(x) = log(x+3)$.

a) $f(7)$= $log(7+3) = log\,10 = 1$

b)odredi x ako je f(x)=1 $\quad 1 = log(x+3) \Rightarrow log(x+3) = 1 \Rightarrow x + 3 = 10^1 \Rightarrow x = 7$

10. Analiziraj parnost funkcija:

a) $f(x) = 2x^2 - cos\,x$

$f(-x) = 2 \cdot (-x)^2 - cos(-x)$ cos(-x)=cosx jer je cos parna funkcija

$f(-x) = 2x^2 - cos\,x$

$f(-x) = f(x)$ => funkcija je parna

b) $f(x) = \frac{3}{x^3 - x}$

$f(-x) = \frac{3}{(-x)^3 - (-x)}$

$f(-x) = \frac{3}{-x^3 + x}$

$f(-x) = \frac{3}{-(x^3-x)}$

$f(-x) = -\frac{3}{x^2-x}$ => $f(-x) = -f(x)$ => funkcija je neparna

c) $f(x) = 3x^2 + x$

$f(-x) = 3(-x)^2 + (-x)$

$f(-x) = 3x^2 - x$ (f(x) $\neq f(x)$ => f nije parna

F(-x) = -($-3x^2 + x$) => $f(x) \neq -f(x)$ => f nije neparna

=> f nije ni parna ni neparna

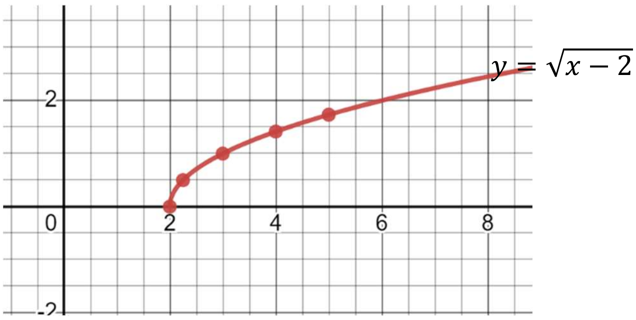
11. Odredi domenu, nacrtaj graf funkcije, odredi sliku, vertikalne i horizontalne asimptote ako ih ima.

a) $f(x) = \sqrt{x-2}$ D(f) = [2,∞ ⟩

tablica:

x	2	$\frac{9}{4}$	3	4	5
f(x)	0	$\frac{1}{2}$	1	≈1.41	≈1.73

Graf:



b) $f(x) = \frac{2}{2x-1}$ D(f) = $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

tablice:

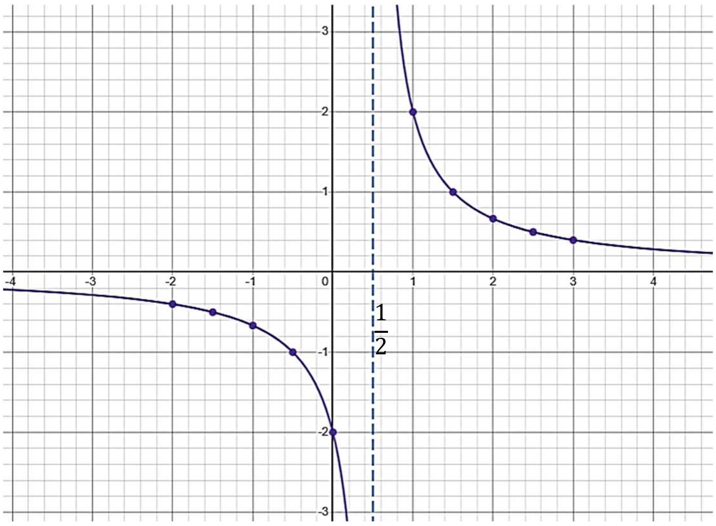
x<$\frac{1}{2}$

x	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-2
f(x)	-2	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$

$x > \frac{1}{2}$

x	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
f(x)	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$

M.Mlikotić,prof.

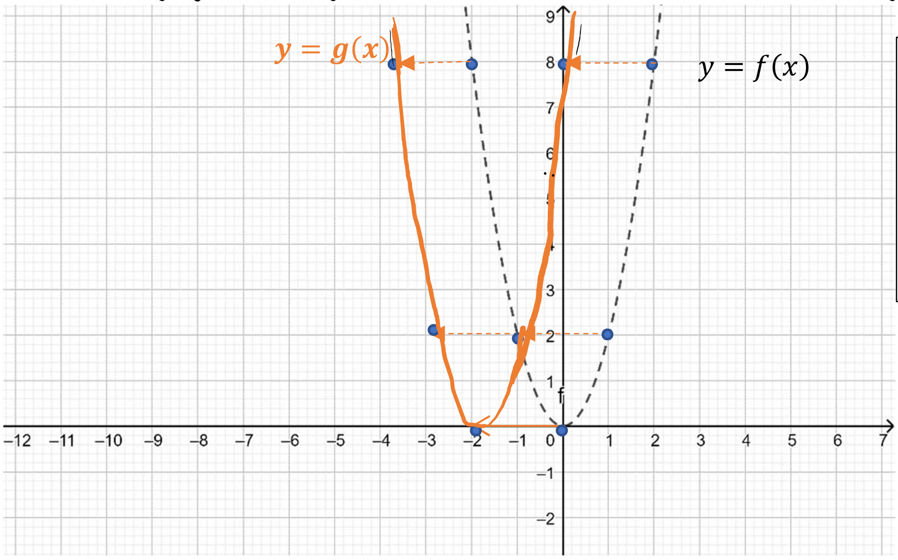


Horizontalna asimptota: os x

jednadžba y=0

Vertikalna asimptota: pravac $x = \frac{1}{2}$

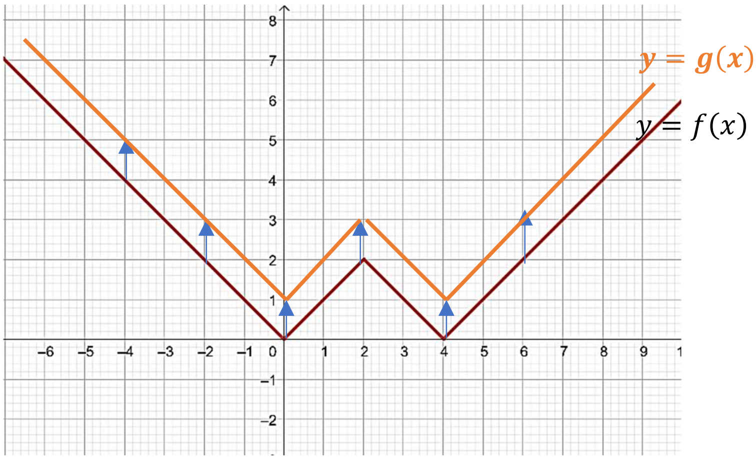
12. Prikazan je graf funkcije f(x). U istom koordinatnom sustavu nacrtaj graf funkcije **g(x)=f(x+2)**



g(x)=f(x-(-2))

graf funkcije g(x) dobivamo pomakom grafa funkcije f po osi x za 2 ulijevo.

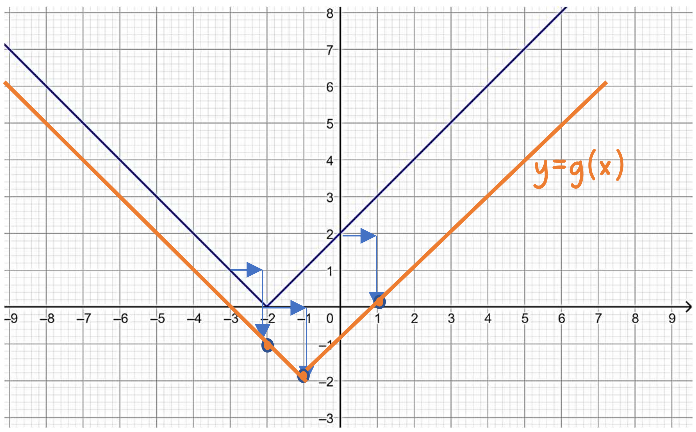
13. Prikazan je graf funkcije f(x). U istom koordinatnom sustavu nacrtaj graf funkcije **g(x)=f(x)+1**



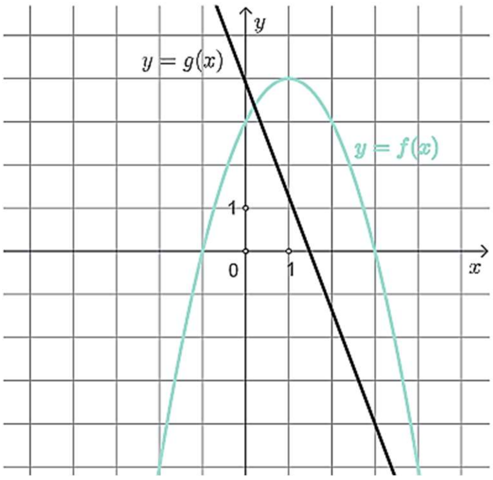
14. Prikazan je graf funkcije f(x). U istom koordinatnom sustavu nacrtaj graf funkcije **g(x)=f(x-1)-2**

Funkciju f pomičemo za 1 desno i za 2 dolje.

M.Mlikotić,prof.



15. Na slici su prikazani grafovi funkcija f i g. Koliko je f(2) + g(3)

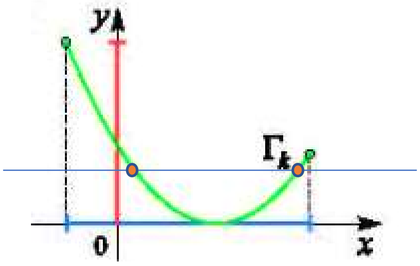
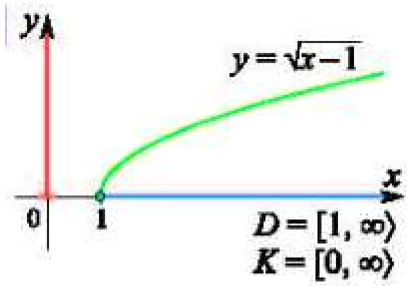


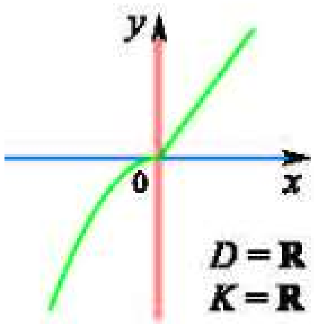
Sa grafa očitamo f(2)=3

g(3)=-4

f(2)+g(3) = 3-4 = -1

15. Za svaku od prikazanih funkcija odredi je li injekcija, surjekcija, injekcija, bijekcija? Domena je označena plavom bojom , a kodomena crvenom.



a) Ako graf projiciramo na y os, vidimo da je slika funkcije cijela kodomena što znači da je funkcija surjekcija.
Horizontalnim testom utvrđujemo da nije injekcija. Nije bijekcija.

b) Ako graf projiciramo na y os, vidimo da je slika funkcije cijela kodomena što znači da je funkcija surjekcija.
Horizontalnim testom utvrđujemo da je injekcija. Funkcija je bijekcija jer je surjekcija i injekcija.

c) surjekcija i injekcija, bijekcija

16.

a) $f(x) = 4x + 2$

$y = 4x + 2 \Rightarrow 4x = y - 2 \Rightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{4}} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y}{4} - \frac{1}{2}$ => $\boldsymbol{f^{-1}(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{2}}$

b) $f(x) = \frac{2x}{x+2}$

$y = \frac{2x}{x+2} \Rightarrow y(x+2) = 2x \Rightarrow yx + 2y = 2x \Rightarrow yx - 2x = -2y =>\ x(y-2) = -2y \Rightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{-2y}}{\boldsymbol{y-2}}$

$\boldsymbol{f^{-1}(y)} = \frac{\boldsymbol{-2y}}{\boldsymbol{y-2}} \Rightarrow \boldsymbol{f^{-1}(x) = \frac{-2x}{x-2}}$

c) $f(x) = 2^{x-1}$

$y = 2^{x-1} \Rightarrow x - 1 = log_2 y \Rightarrow x = log_2 y + 1 \Rightarrow f^{-1}(y) = log_2 y + 1 => f^{-1}(x) = \log_2 x + 1$

M.Mlikotić,prof.